CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DE L'ECOLE DE GESTION

INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Coefficient : 4
Durée : 4 heures.

Avertissement :

Dans l'évaluation des copies il sera tenu le plus grand compte de la qualité de la rédaction, notamment pour ce qui est de la présentation, de la clarté des raisonnements et de la concision.

Les résultats des questions non traitées peuvent être utilisés par la suite en indiquant clairement qu'ils sont admis.

L'épreuve compte trois exercices :

Les exercices 1 et 2 sont à traiter par tous les candidtas.

L'exercice 3 est réservé aux candidats issus des classes de préparation aux écoles de Gestion et de Commerce.

L'exercice 4 est réservé aux candidats issus des classes de Mathématiques Spéciales.

Tous les instruments de calculs sont autorisés.

EXERCICE 1 On considère la fonction F, définie sur R par : $x \to F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

I. PREMIERE PARTIE

1) Montrer à l'aide d'un changement de variable que la fonction F est impaire.

2) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur R.

II. DEUXIEME PARTIE

On considère la suite (I_n) définie pour $n \in N^*$ par : $I_n = \int_1^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

1) Montrer que la suite (I_n) est strictement croissante.

2) Soit la fonction f définie pour u positif ou nul par : $u \to f(u) = u\,e^{-u}$

Montrer que pour tout u positif ou nul nous avons : $f(u) \leqslant \frac{1}{e}$

3) En déduire que :

a) la suite (I_n) est majorée par $\frac{2}{e}$. On pourra poser : $u = \frac{t^2}{2}$.

b) la suite (I_n) converge, quand $n \to +\infty$, vers une limite que l'on notera I.

III. TROISIEME PARTIE Dans cette partie nous cherchons à encadrer la différence : $I - I_n$.

Considérons les deux fonctions définies sur R^{+*} par : $x \to g(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}$

et $x \to h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)$

1) Déterminer les fonctions dérivées g' et h' des fonctions g et h.

2) Montrer que : a) si $0 < x < b$ alors : $g(x) - g(b) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt$

TSVP

b) si $0 < x < b$ alors : $h(x) - h(b) = \int_x^b e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 - \frac{1}{t^2} - \frac{6}{t^4} \right) dt$

3) En déduire que si m et n sont deux entiers tels que $m > n > 0$, nous avons les inégalités :

$$I_m + g(m) < I_n + g(n) \qquad (1) \qquad \text{et} \qquad I_m + h(m) > I_n + h(n) \qquad (2)$$

4) En faisant tendre m vers plus l'infini, montrer que : $h(n) \leqslant I - I_n \leqslant g(n)$

5) Montrer qu'au voisinage de +oo nous avons : $I - I_n \sim \frac{e^{-\frac{n^2}{2}}}{n}$

EXERCICE 2

Notations

- R est l'ensemble des nombres réels.
- R^n et R^p sont les deux espaces vectoriels usuels sur R (n et p sont des entiers).
- On note Φ une application linéaire de R^p dans R^n.
- On désignera par A la matrice de Φ par rapport aux bases canoniques B et B' de R^p et R^n respectivement.
- Ker Φ et Im Φ sont le noyau et l'image de Φ.

1) Justifier rapidement l'existence de deux sous-espaces vectoriels S et T de R^p et R^n respectivement, tels que :

$$R^p = S \oplus \text{Ker } \Phi \quad ; \quad R^n = \text{Im } \Phi \oplus T$$

2) a) Sachant que la matrice A est de rang r, montrer que : $\dim \text{Ker } \Phi = p - r$; $\dim T = n - r$; $\dim S = r$

b) Soit $\{ e_1, e_2, \ldots e_r \}$ une base de S. Montrer que : $\{ \Phi(e_1), \Phi(e_2), \ldots \Phi(e_r) \}$ est une base de Im Φ.

c) En déduire l'existence d'une base B_1 de R^p et d'une base B'_1 de R^n telles que dans ces bases la matrices A' de Φ soit de la forme : $A' = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (I_r : r lignes, r colonnes ; 0 : r lignes, $p-r$ colonnes ; 0 : $n-r$ lignes, r colonnes ; 0 : $n-r$ lignes, $p-r$ colonnes) sachant que I_r est la matrice unité d'ordre r.

A' est appelée la matrice canonique de rang r associée à A.

3) Montrer qu'il existe des matrices carrées inversibles, P d'ordre p, et Q d'ordre n, telles que : $A' = Q.A.P$

(Conseil : on utilisera la notion de matrice de passage d'une base dans une autre).

4) Application Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 6 & 4 & 3 & -5 \\ 4 & 10 & 2 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

a) Déterminer le rang r de la matrice A.

b) Donner la matrice canonique de rang r associée à A.

TSVP

EXERCICE III (élèves des classes préparatoires aux écoles de Gestion et de Commerce).

NOTA : On admettra et on pourra utiliser sans justification le résultat suivant :

Si une série de terme général $a_n x^n$ converge vers un nombre $f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-R,+R[$, alors la série de terme général $na_n x^{n-1}$ obtenue en dérivant terme à terme la série initiale, converge pout tout x dans $]-R,+R[$ vers $f'(x)$ dérivée au point x de la fonction $x \to f(x)$.

Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs entières positives ou nulles. La loi de probabilité de X est donnée par :

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\} \quad ; \quad \left[P(X=i) = p_i \right]$$

1) Soit s un réel tel que : $-1 < s < +1$. Montrer la série de terme général $p_i s^i$ converge.

2) On note $G(s)$ la somme de la série précédente : $G(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i s^i = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i) s^i$

La fonction $s \to G(s)$ ainsi obtenue est appelée : fonction génératrice de la variable aléatoire X.

a) Montrer que si X suit une loi binominale B(n,p), sa fonction génératrice est :

$$s \to G(s) = (q + ps)^n \qquad (p + q = 1)$$

b) Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre m, sa fonction génératrice est : $s \to G(s) = e^{m(s-1)}$

c) Montrer que si k est un entier naturel non nul et si $s \to G(s)$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire X alors $s \to G(s^k)$ est la fonction génératrice associée à la variable aléatoire $Y = kX$.

3)On suppose que les variables aléatoires X et X^2 ont des espérances mathématiques $E(X)$ et $E(X^2)$.

a) Montrer que alors : $E(X) = G'(1)$ et $E(X^2) - E(X) = G''(1)$

G' et G'' étant respectivement les dérivées première et seconde de la fonction génératrice associée à X.

b) Retrouver par cette méthode la moyenne et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi binominale B(n,p) puis une loi de Poisson de paramètre m.

4) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires prenant des valeurs entières positives ou nulles. La distribution de probabilité du couple (X_1, X_2) est donnée par :

$$p_{j,k} = P(X_1 = j \; ; \; X_2 = k)$$

On définit alors la fonction génératrice du couple (X_1, X_2) par : $(s_1, s_2) \to G(s_1, s_2) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} p_{j,k} s_1^j \cdot s_2^k$

a) Montrer que la fonction génératrice de la variable X_1 est : $s_1 \to g_1(s_1) = G(s_1, 1)$

et celle de la variable X_2 est : $s_2 \to g_2(s_2) = G(1, s_2)$

b) Montrer que la fonction génératrice $s \to h(s)$ de la somme $X_1 + X_2$ est : $s \to h(s) = G(s, s)$

c) Montrer que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si : $G(s_1, s_2) = g_1(s_1) \cdot g_2(s_2)$

5) En utilisant les questions précédentes, montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent, toutes deux, une loi de Poisson de même paramètre m, alors la variable aléatoire $X + 3Y$ est telle que : $E(X + 3Y) = 4m$ et $\sigma^2(X + 3Y) = 10m$.

TSVP

EXERCICE IV (Réservé aux élèves issus des classes de Mathématiques Spéciales)

Le but de cet exercice est d'utiliser quelques méthodes de résolution d'une équation différentielle du second ordre.

Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

I. PREMIERE PARTIE

On note C^n l'ensemble des fonctions n fois continûment dérivables sur un sous-ensemble I de R. u est une fonction quelconque appartenant à C^1. On considère l'application B_u de C^2 dans C^1 définie par :

$$y \to B_u(y) = \frac{dy}{dx} + u(x)\, y$$

I.1) Montrer que l'application B_u est linéaire.

I.2) Soit l'équation différentielle : $y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0$ $(E_{a,b})$

dans laquelle a et b sont deux fonctions appartenant à C^1. Trouver une condition nécessaire et suffisante liant les fonctions a et b pour que : $(E_{a,b}) \Leftrightarrow (B_u \circ B_u)(y) = 0$

I.3) a) Montrer que l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2 + 1)\, y = 0$ (E)

répond à ces conditions. Préciser la fonction u.

b) Résoudre alors l'équation (E).

II. DEUXIEME PARTIE

On considère l'équation différentielle suivante : $xy \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y \frac{dy}{dx} = 0$ (E)

II.1) Résoudre cette équation pour $x > 0$ en effectuant le changement de variable : $x = e^t$.

$\left(\text{On pourra poser : } u = \frac{y}{\frac{dy}{dt}} \right)$

II.2) On effectue le changement de fonction :

$$y = e^{u(x)}$$

a) Former l'équation différentielle (E') que satisfait la fonction u si y est solution de l'équation (E).

b) En déduire la solution générale de (E). (Pour résoudre (E') on pourra poser $z = 1/u'$; u' dérivée par rapport à x).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail